Herhalingstentamen W5, augustus 2001

(1) $U = \{z \in \mathbf{C} |\ 1 < |z| < 2\}$. Is U samenhangend? Is U enkelvoudig samenhangend? Is er een holomorfe funktie f op U zodat $f(z)^3 = z$ voor alle $z \in U$? (Geef argumenten bij Uw antwoord).

(2) U is de open deelverzameling $\mathbf{C} \setminus \{ri |\ r \in \mathbf{R}, r \geq 0\}$. Bestaat er een holomorfe funktie f op U met $f(1) = 0$ en $f'(z) = \frac{1}{z}$ voor alle $z \in U$? Zo ja, bereken de waarde $f(-1)$.

(3) Geef de definities van "open deelverzameling van $\mathbf{C}$" en van "compacte deelverzameling" van $\mathbf{C}$. Is er een deelverzameling $U \neq \emptyset$ van $\mathbf{C}$ die tegenlijk compact is en open? (Beredeneer Uw antwoord).

(4) Is de functie $f(x+iy) = x^2 + iy^2$ een holomorfe funktie op $\mathbf{C}$? (Beredeneer Uw antwoord).

(5) Wat is de convergentiestraal r van een machtreeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$? Bereken de eerste drie termen van de machtreeksontwikkeling van de funktie $f(z) = \frac{z-1}{z^2-2}$ in het punt $z = 0$. Welke convergentiestraal heeft die machtreeks?

(6) Laat f een holomorfe funktie zijn op een open verzameling U, laat $z_0 \in U$ en $f'(z_0) \neq 0$. Bewijs dat $\frac{2\pi i}{f'(z_0)} = \int_C \frac{1}{f(z)-f(z_0)} dz$ waarbij C een kleine cirkel is met middelpunt z_0.

(7) Bereken de Laurentreeks van de funktie $f(z) := \frac{\sin z - z}{z^3}$ in het punt $z = 0$. Bereken het maximum van $|f(z)|$ op de verzameling $\{z \in \mathbf{C} |\ |z| \leq 1\}$.

(8) Bereken de integraal $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx$.

(9) $S := \{n\sqrt{-1} |\ n \in \mathbf{Z}, n \geq 1\}$. Produceer een holomorfe funktie F op $\mathbf{C}$ zó dat S de verzameling van zijn nulpunten is en bovendien elk nulpunt orde 1 heeft.

(10) Bereken dat $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1} dx = \pi e^{-a}$ als $a > 0$.